Ασκήσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης

Δευτέρα 30 Νοεμβρίου 2015

7^{ο} Μάθημα - Χώροι Εσωτερικού Γινομένου

Άσκηση 1. Έστω $T : (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (K, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ γραμμική ισομετρία μεταξύ δύο χώρων Hilbert H, K. Να δειχθεί ότι $\langle x, y \rangle_1 = \langle Tx, Ty \rangle_2$, για κάθε $x, y \in H$.

Άσκηση 2. (α') Να δείξετε ότι σε ένα χώρο με νόρμα, μια ευθεία δεν μπορεί να τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα του χώρου σε ακριβώς τρία σημεία.

(β') Να δείξετε ότι σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, μια ευθεία μπορεί να τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα του χώρου το πολύ σε δύο σημεία.

(γ') Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ ονομάζεται αυστηρά κυρτός, αν για κάθε $x, y \in S_X$ με $x \neq y$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$, $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου είναι αυστηρά κυρτός.

(ii) Σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, αν $x \in B_X$ και $y \in B_X$ με $\|y\| < 1$, τότε για κάθε $\lambda \in (0,1)$, $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$.

(iii) Ένας χώρος με νόρμα X είναι αυστηρά κυρτός αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in S_X$ με $x \neq y$, $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$. *(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ερώτημα (ii).)*

(iv) Ένας χώρος με νόρμα X είναι αυστηρά κυρτός αν και μόνο αν κάθε ευθεία του τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα S_X το πολύ σε δύο σημεία.

(v) Να δοθεί παράδειγμα χώρου με νόρμα, ο οποίος να μην είναι αυστηρά κυρτός.

Άσκηση 3. Έστω X χώρος εσωτερικού γινομένου και $\emptyset \neq A$, $B \subseteq X$ με $A \subseteq B$.

(α') Να δειχθεί ότι $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$ και να δοθούν παραδείγματα συνόλων όπου η εν λόγω τομή είναι κενή ή ίση με $\{0\}$.

(β') Να δειχθεί ότι $A = \bigcap_{a \in A} \{a\}^{\perp}$.

(γ') Να βρεθούν τα $\{0\}^{\perp}$ και $X^{\perp}$.

(δ') Να δειχθεί ότι $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, $A \subseteq A^{\perp\perp}$, $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$ και να βρεθούν παραδείγματα στα οποια οι δύο πρώτοι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι.

(ε') Αν το A είναι ανοικτό σύνολο, να βρεθεί το $A^{\perp}$.